

# ВИКОРИСТАННЯ ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІН ЦИКЛУ “МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ”

*Катерина РУМ'ЯНЦЕВА, Олена ВІЛЬЧИНСЬКА*

*Стаття присвячена проблемі впровадження економіко-математичних моделей під час вивчення дисциплін циклу “Математика для економістів”. Наведено перелік основних економіко-математичних моделей, які розглядаються у курсах вищої математики і теорії ймовірностей та математичній статистиці. Визначена роль завдань з економічним змістом у формуванні в студентів умінь та навичок, необхідних у майбутній професійній діяльності.*

*The article considers the issue of implementing economic and mathematical models while teaching “Maths for economists”. The main economic and mathematical models taught in the course of “Advanced maths”, “Probability theory” and “Mathematic statistics” have been listed. The role of economy based tasks in the process of building students' skills and abilities necessary for their future professional activity is defined.*

**Постановка проблеми.** Значним науковим досягненням стало впровадження математичних методів у економічну науку і в управління економічними процесами. У наш час наукове управління цими процесами може бути здійснено тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання – від прогнозування розміщення корисних копалин до вивчення попиту на товари широкого вжитку і побутові послуги, від вивчення потреби в робочій силі до планування транспортних артерій тощо. Ось чому сьогодні математика як навчальна дисципліна посідає чільне місце в навчальних планах практично всіх спеціальностей вищих навчальних закладів [1, 9].

Вивчення різних економічних явищ сьогодні неможливе без використання економіко-математичних моделей, які є спрощеним їх описом та враховують найбільш суттєві і визначальні фактори досліджуваного явища.

Застосування математики в економіці дозволяє виділити і формально описати математичними співвідношеннями найбільш суттєві зв'язки між економічними змінними та об'єктами: вивчення такого складного об'єкта, як економіка, вимагає високого ступеня абстракції; базуючись на чітко сформульованих вихідних даних і відношеннях, методом дедукції можна отримати висновки, які адекватні досліджуваному об'єкту такою ж мірою, що й наявні передумови; методи математики і статистики дозволяють індуктивним шляхом отримати нові знання про досліджуваний об'єкт: оцінити характер залежності між його змінними, які найбільше відповідають наявним спостереженням; використання математичної термінології дозволяє точно і компактно висловити твердження економічної теорії, сформулювати її поняття і висновки.

Аналіз попередніх досліджень свідчить, що проблемами організації навчання математичним дисциплінам у вищих навчальних закладах з урахуванням сучасних вимог опікуються вчені: І.П. Васильченко, Л.П. Гусак, Г.Я. Дутка, Т.В. Крилова, О.В. Левчук, Л.І. Нічуговська, В.А. Петрук та ін. Аналіз цих робіт виявив одну особливість, яка полягає у тому, що незважаючи на різноманітність методичних рекомендацій науковців, у них відсутня цілісна методика організації занять з вищої математики та теорії ймовірностей та математичної статистики, що входять до складу курсу “Математика для економістів”, щодо використання економіко-математичних моделей під час навчальних занять майбутніми економістами.

**Мета статті** полягає у розгляді проблеми впровадження економіко-математичних моделей під час вивчення дисциплін циклу “Математика для економістів”.

**Виклад основного матеріалу.** Математична освіта в сучасних умовах її розвитку має за мету формування у майбутніх економістів: наукового світогляду, математичної та інформаційної культури, інтелектуальної підготовки до майбутньої професії та до життя у суспільстві.

Річ у тому, що формувати у студентів уявлення про майбутню професійну діяльність необхідно починати з перших курсів навчання у вищих навчальних закладах, також доцільно демонструвати застосування математичного апарату у майбутній професійній діяльності, тим самим реалізуючи один із принципів педагогіки – єдність теорії і практики.

Вивчення різних економічних явищ сьогодні неможливе без використання економіко-математичних моделей, які є спрощеним їх описом та враховують найбільш суттєві і визначальні фактори досліджуваного явища.

Саме економіка максимально використовує ймовірісно-статистичні методи. Вміння застосовувати ймовірісно-статистичний апарат до економічних розрахунків, аналізу, прогнозу закладає основи успішного засвоєння дисциплін економічного циклу, а саме: статистики, економіки підприємства, економічного аналізу, економічного ризику, управління витратами та ін.

Згідно діючих навчальних планів дисципліни “Вища математика” та “Теорія ймовірностей та математична статистика” входять до циклу “Математика для економістів”.

У робочих навчальних програмах з вищої математики та з теорії ймовірностей та математичної статистики акцентована увага на поняттях і методах цих дисциплін, які сьогодні найчастіше використовуються в економічній практиці. У процесі викладання цих дисциплін ці поняття й методи переводяться у площину економіко-математичних моделей, короткий перелік яких поданий у таблиці 1.

Таблиця 1.

**Економіко-математичні моделі в курсі математики для економістів**

Розділи курсу математики для економістів	Економіко-математичні моделі
Елементи лінійної алгебри	Застосування матриць і систем лінійних рівнянь в економічних розрахунках. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз). Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі).
Елементи векторної алгебри	Застосування векторної алгебри в економічних розрахунках. Економічний зміст скалярного добутку, n-вимірні вектори товарів і цін.
Елементи аналітичної геометрії	Лінійні моделі виробничих функцій. Лінійні моделі попиту і пропозиції. Аналіз прибутковості – збитковості на основі лінійних моделей функцій доходу і витрат. Закон розподілу прибутків (закон Парето).
Функція однієї та багатьох змінних	Функції попиту і пропозиції, рівноважна ціна і павутиноподібна модель. Виробничі функції: витрат, доходу, прибутку, собівартості. Функція залежності попиту на різні товари від доходу населення. Прості та складені відсотки. Задача про неперервне нарахування відсотків. Економічна інтерпретація числа e. Функція Кобба-Дугласа.
Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних	Економічний зміст похідної. Похідна функції обсягу виробництва як продуктивність праці. Похідна виробничої функції як граничні: витрати, дохід, прибуток виробництва. Еластичність функції однієї змінної і частинні еластичності функції багатьох змінних виробничих функцій, функції попиту і пропозиції. Максимізація доходу і прибутку та мінімізація витрат у випадку виробничих функцій однієї та багатьох змінних.

Розділи курсу математики для економістів	Економіко-математичні моделі
	Мінімальність транспортних витрат. Опуклість функції корисності та її економічний зміст. Оптимізація оподаткування підприємств. Закон спадної ефективності виробництва.
Інтегральне числення функції однієї і багатьох змінних	Обчислення загальних витрат, доходу, прибутку за відомими граничними витратами, доходом, прибутком. Обчислення обсягу виробленої продукції за відомою продуктивністю праці. Обчислення додаткових витрат, доходу і прибутку. Обчислення суми споживчого активного сальдо. Обчислення прибутку від відсотків вкладу при неперервному нарахуванні. Розподіл доходів населення. Крива Лоренца, коефіцієнт Джині.
Диференціальні рівняння	Демографічний аналіз. Аналіз ефективності реклами. Аналіз зростання випуску продукції при інвестиціях. Залежність національного доходу від динаміки споживання. Динаміки ринкових цін. Модель ринку з прогнозованими цінами. Модель зростання в умовах конкуренції.
Теорія ймовірностей	Обчислення можливих варіантів в бізнесі і економіці. Обчислення найбільш імовірних варіантів в економіці. Нормальний розподіл випадкових величин у фінансах Достовірність статистичних висновків.
Математична статистика	Аналіз результатів статистичних досліджень. Перевірка правильності вибору закону розподілу і оцінки його параметрів в статистичних дослідженнях. Аналіз статистичної залежності між результатами спостережень.

Теорія ймовірностей та математична статистика є складовою частиною дисципліни “Математика для економістів” і відіграє важливу роль у базовій освіті фахівців економічного профілю. Це зумовлено, насамперед, тим, що економічна інформація найчастіше має випадковий характер і економічні задачі моделюються та досліджуються за допомогою ймовірнісних і статистичних методів.

Зокрема в процесі вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, що є базовою для таких економіко-математичних дисциплін, як статистика, теорія ризиків, теорія масового обслуговування та інші, студенти ознайомлюються з методикою описання та вивчення ринкових економічних процесів (в умовах їх невизначеності) за допомогою випадкових величин і за основними принципами їх статистичного дослідження.

Практика викладання математики для студентів економічних спеціальностей свідчить, що засвоєння програми з теорії ймовірностей та математичної статистики викликає в них певні труднощі, які пов’язані з розумінням основних понять і методів та застосуванням їх для розв’язування економічних задач.

Основними методами дослідження і оцінки ризиків залишається теорія ймовірностей, математична статистика та пов’язані з ними дисципліни. Тому ознайомлення студентів з основними принципами побудови і дослідження ймовірнісних моделей має не лише математичний, а й соціально напрямлений інтерес. Таким чином, ми переконані в тому, що при ознайомленні з найпростішими моделями ймовірнісних явищ можна ілюструвати застосування їх до конкретних соціально затребуваних потреб.

Теорія ймовірностей має ще одне важливе застосування в економічній та соціальній сфері. Ці застосування можна охарактеризувати як опис конфліктних ситуацій. Ця галузь математики має назву теорії ігор, а спосіб дії гравців визначається як стратегії. Основним результатом для теорії скінчених антагоністичних ігор є теорема Неймана-Моргенштерна про те, що кожна матрична гра має розв'язок принаймні на множині змішаних стратегій, тобто на множинах скінченновимірних розподілів випадкових величин. Аналогічні підходи використовуються при дослідженні так званих ігор з природою, коли стратегії протилежної сторони не тільки невідомі, а й визначаються деякою величиною. Ці задачі мають важливе застосування при еколого-економічному моделюванні природничо-економічних процесів.

В курсі теорії ймовірностей та математичної статистики вивчається теорія випадкових процесів. Це математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ в динаміці їх розвитку. Так випадкові процеси описують багато фізичних, економічних та виробничих явищ. До них належать броунівський рух дрібної частинки, який виникає внаслідок взаємодії частинки з молекулами рідини, коливання валютних курсів, курсів акцій, ціни на певний товар, сподівана вартість грошей, банківські активи, довжина черги та кількість заявок на обслуговування в кожний момент часу з деякого проміжку часу в різних системах надання послуг тощо.

Для прикладу розглянемо економіко-статистичну модель податково-бюджетного навантаження в умовах перехідного періоду, яку вивчають в курсі теорії ймовірностей та математичної статистики.

Створення ефективної податкової системи в умовах перехідного періоду є тим важелем, який би стимулював швидкий перехід до ринкових відносин та їх ефективний розвиток.

В умовах перехідного періоду проявляється певна невизначеність зовнішніх чинників (законодавство, постанови уряду, стан економічної системи), які залежно від податків можуть сприяти або економічному зростанню, або застою, або занепаду економіки. Тому податковий важіль є функцією від зовнішніх чинників, які надалі називатимемо середовищем.

Середовище наперед нам не відоме. Тому задавати його будемо за допомогою станів  $A_1, A_2, \dots, A_n$  які одночасно відбуватися не можуть і при цьому утворюють повну групу попарно несумісних подій. Зазначимо, що серед станів  $A_1, A_2, \dots, A_n$  є так звані стани економічного піднесення, застою, спаду. Конкретизація станів – це довга і клопітка робота досвідченої групи експертів з побудови прогнозу економічного розвитку системи. За допомогою економіко-статистичних методів експерти оцінюють імовірність настання кожної з подій

$$D(A_1) = \delta_1; D(A_2) = \delta_2; \dots; D(A_n) = p_n,$$

причому  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = 1$ .

Надалі вважатимемо, що в кожному фіксованому стані взаємозалежність між величиною сукупної податкової ставки та обсягом податкових надходжень описується за допомогою кривої Лаффера. Відомо, що загальний вигляд кривої Лаффера задається рівнянням:

$$F(x) = \lambda x^\alpha (1-x)^\beta \quad (1)$$

де  $\lambda, \alpha, \beta$  – структурні параметри кривої,  $x$  – сукупна податкова ставка,  $F(x)$  – обсяг надходжень.

На основі статистичних даних визначають точкові оцінки коефіцієнтів  $\alpha, \beta$ . Оптимальна відсоткова ставка податків залежить виключно від коефіцієнтів  $\alpha, \beta$ . Легко показати, що вона становитиме:

$$\tilde{\delta}_0 = \frac{\alpha}{2 + \beta} \quad (2)$$

( $\alpha, \beta$  визначаємо за відсотковою ставкою податків, складаємо два рівняння з двома невідомими).

Нехай тепер у стані  $A_i$  рівняння кривої Лаффера має вигляд:

$$F_i(x) = \lambda_i x^{\alpha_i} (1-x)^{\beta_i} \quad (3)$$

і при цьому відсоткова оптимальна ставка податків становить:

$$\tilde{\alpha}_0^i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Усереднена відсоткова ставка податків, яка не є чутливою до впливу середовища, цілком природно визначається за допомогою формули:

$$\tilde{x}_0 = \sum_{i=1}^n P(A_i) X_0^i = \sum_{i=1}^n P_i \left( \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i} \right) \quad (5)$$

Ризикованість ставки відсотків можна задати за допомогою середньоквадратичного відхилення:

$$\sigma(\tilde{\alpha}_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^n P(A_i) (X_0^i - \tilde{X}_0)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n P_i (X_0^i)^2 \tilde{X}_0^2}.$$

Найбільш уживаною мірою ризику буде величина

$$\frac{\sigma(\tilde{\alpha}_0)}{\tilde{\alpha}_0},$$

яка вказує міру ризику на одиницю відсоткової податкової ставки.

На практиці сукупну податкову ставку вибирають дещо меншою за максимальну. При цьому завжди платник податків буде зацікавлений у їх сплаті, і кількість платежів, очевидно, не буде зменшуватися. При цьому бажано значення параметра  $\alpha$  вибирати меншим, а значення  $\beta$  – дещо більшим [2, 456].

**Висновки.** Розв'язування завдань з економічним змістом під час вивчення вищої математики та теорії ймовірностей та математичної статистики дозволяє продемонструвати зв'язки між математикою та економікою. Побудова і дослідження економіко-математичних моделей сприятиме розвитку навичок застосування математичних методів для аналізу реальних економічних ситуацій.

Використання економіко-математичних моделей під час вивчення математичних дисциплін у вищих економічних навчальних закладах дає позитивні результати, а саме:

- демонструє зв'язок теорії з практикою;
- викликає інтерес у студентів нестандартною постановкою математичного завдання;
- сприяє застосуванню математичного апарату для дослідження економічних процесів і явищ;
- допомагає побудові моделей економічних ситуацій;
- сприяє знаходженню математичних залежностей в реальних виробничих процесах.

#### БІБЛІОГРАФІЯ

1. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірності та математична статистика. – Підручник. – К.: ВД "Професіонал", 2007. – 560 с.
2. Дутка Г.Я. Фундаменталізація математичної освіти майбутніх економістів: монографія / Г.Я. Дутка; наук. ред. д-р пед. наук, проф., чл.-кор. АПН України М.І. Бурда. – К.: УБС НБУ, 2008. – 478 с.

#### ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Рум'янцева Катерина Євгенівна** – кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри гуманітарних та фундаментальних дисциплін Вінницького навчально-наукового інституту економіки Тернопільського національного економічного університету.

*Коло наукових інтересів:* проблеми професійного навчання майбутніх економістів.

**Вільчинська Олена Миколаївна** – кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри гуманітарних та фундаментальних дисциплін Вінницького навчально-наукового інституту економіки Тернопільського національного економічного університету.

*Коло наукових інтересів:* економіко-математичне моделювання соціально-економічних процесів.